



TITLE:

# 有限幾何と実験計画 (実験計画法研究会報告集)

AUTHOR(S):

山本, 純恭; 福田, 悌次郎; 浜田, 昇

---

CITATION:

山本, 純恭 ...[et al]. 有限幾何と実験計画 (実験計画法研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1967, 25: 93-104

ISSUE DATE:

1967-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107504>

RIGHT:

## 有限幾何と実験計画

広島大理 山本 純恭

海上保安大 福田 悌次郎

広島大理 浜田 昇

### 1. 序

C. R. Rao [2], [3] は R. C. Bose の Difference theorems [1] と呼ばれる定理を一般化し, BIBD を巡回的に生成する difference sets の構成法を発表した。一つのガロア体  $GF(m)$  上の有限  $t$  次元射影空間  $PG(t, m)$  及びユークリッド空間  $EG(t, m)$  において, 点の全体を treatments,  $d \leq t$  次元線形部分空間 ( $d$ -flat) の全体を blocks にとると BIBD が得られることは周知の通りであるが [1], Rao は一般化された difference theorems を用いてこれらの designs を組織的に作るために,  $d$ -flat に cycle という概念を導入して  $d$ -flats の全体を類別し, その構造定理を次のように述べた。

#### Proposition 1 (Rao)

$PG(t, m)$  において  $r_1, r_2, \dots, r_p$  を次の条件をみたす正整数とする。

- (a)  $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_p < t$ ,
- (b)  $(m^{d+1}-1)/(m^{r_i+1}-1) = \lambda_i$  は正整数,

$$(c) (d+1)/(r_i+1) = t_i \quad \text{は正整数,}$$

$$(d) (r_{i+1}+1)/(r_i+1) = l_i \quad \text{,}$$

$$(e) (m^{t_i}-1)/(m^{r_i+1}-1) = \theta_i \quad \text{,}$$

すると,  $y_i = (n_i - n_{i+1})/\theta_i$  個の cycle  $\theta_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) の initial flats と  $\eta = (b - n_1)/v$  個の cycle  $v$  の initial flats が存在し,  $d$ -flats の全体はこれらの initial flats から生成される. ここに,  $n_i = \binom{\theta_i}{t_i} / \binom{\lambda_i}{t_i}$  であり,  $v$  と  $b$  はそれぞれ  $PG(t, m)$  における点と  $d$ -flats の個数である.

### Proposition 2 (Rao)

$EG(t, m)$  において  $h = p_0 p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots$  ( $p_0=1$ ,  $p_i$  は  $p_i < p_{i+1}$  をみたす素数) を  $d$  と  $t$  との最大公約数とすると, 原点 (0) を通る  $d$ -flats は  $\theta_{j,s} = (m^t - 1)/(m^{r_{j,s}} - 1)$  なる形の cycles をもち, cycle  $\theta_{j,s}$  の initial flats の個数は

$$(n_{j,s} - n_{j+1, s+1}) / \theta_{j,s}$$

である. そして原点を通る  $d$ -flats の全体はこれらの initial flats から生成される. ここに  $r_{j,s} = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_j^{i_j}$  ( $j=0, 1, \dots; s=0, 1, \dots, i_j$ ),  $n_{j,s} = \binom{\theta_{j,s}}{d/r_{j,s}} / \binom{q_{j,s}}{d/r_{j,s}}$ ,  $q_{j,s} = (m^d - 1)/(m^{r_{j,s}} - 1)$ .

しかしながら, これらの Propositions は特別の場合を除いて一般には成立しない. この論説の目的の一つはこれらの構造定理を修正することである. 今一つの目的は より小さいある cycle  $\theta$  の  $d$ -flats のみを blocks にとることにより一つの PBIBD が得られること, 更に,

cycle も  $d$ -flat 上の点の一部のみを treatments にとることにより一つの BIBD が得られることを示す。これらの考察から、 $PG(t, m=p^n)$  における  $d$ -flat の全体から作られる BIBD (今後これを  $PG(t, m): d$  で表わす) は  $PG(\tilde{t}, p)$  における  $\tilde{d}$ -flat の全体から作られる BIBD  $PG(\tilde{t}, p): \tilde{d}$  において、blocks の一部及び treatments の一部をカットすることによっても得られることがわかる。ここに、 $\tilde{t} = n(t+1)-1$ ,  $\tilde{d} = n(d+1)-1$ .

以下主要結果を述べる。詳細については [4] を参照されたい。

## 2. $PG(t, m)$ における $d$ -flat

[定義] ガロア体  $GF(m=p^n)$  上の  $t$  次元射影空間  $PG(t, m)$  とは 次の条件をみたす点の集合である。

- (a)  $GF(m^{t+1})$  の非零元  $\nu$  を点と考えると  $(\nu)$  で表わす。
- (b) 2点  $(\nu)$  と  $(\mu)$  とは  $\mu = \sigma\nu$  なる  $\sigma \neq 0 \in GF(m)$  が存在するときに限り同一点を表わす。
- (c)  $(\nu_0), (\nu_1), \dots, (\nu_d)$  を係数体  $GF(m)$  に関して一次独立な点とすると、点  $(a_0\nu_0 + a_1\nu_1 + \dots + a_d\nu_d)$  の全体を  $d$ -flat という。ただし  $a_i \in GF(m)$  であり、同時に 0 となることはないものとする。

特に 0-flat を点, 1-flat を直線, 2-flat を平面と呼ぶ。

[定義]  $\alpha$  を  $GF(m^{t+1})$  の原始元のひとつとすると,  $\alpha$  は  $GF(m)$  を係数域とする  $t+1$  次の minimum function  $f(x) = x^{t+1} + a_t x^t + \dots + a_1 x + a_0$  の零点であり,  $GF(m^{t+1})$  の非零元は  $\alpha^k (k=0, 1, 2, \dots, m^{t+1}-2)$  の形で

表わされる。これを  $x$  によるべき表現という [1], [2]。

$(t+1)/(i+1)$  が正整数のときは  $\theta = (m^{t+1}-1)/(m^{i+1}-1)$  とおくと,  $x^\theta$  は  $GF(m^{i+1})$  の原始元であるから 次の表現を得る:

$$GF(m^{i+1}) = \{0, x^\theta, x^{2\theta}, \dots, x^{(m^{i+1}-2)\theta}\},$$

$$PG(i, m) = \{(x^0), (x^\theta), \dots, (x^{(\frac{m^{i+1}-1}{m-1}-1)\theta})\}.$$

特に  $i=0$  のとき

$$GF(m) = \{0, x^0, x^v, \dots, x^{(m-2)v}\},$$

$$PG(t, m) = \{(x^0), (x^1), (x^2), \dots, (x^{v-1})\}. \quad \text{ただし, } v = \frac{m^{t+1}-1}{m-1}.$$

また,  $x^\theta$  が  $GF(m^{i+1})$  の原始元であることから  $PG(i, m)$  の点の中で最初の  $i+1$  個の点  $(x^0), (x^\theta), \dots, (x^{i\theta})$  が 係数体  $GF(m)$  に関して一次独立であることがわかる。

[定義] 一次独立な  $d+1$  個の点  $(x^{b_0}), (x^{b_1}), \dots, (x^{b_d})$  を通る  $d$ -flat

$$V_d(0) = \{(a_0 x^{b_0} + a_1 x^{b_1} + \dots + a_d x^{b_d})\} \quad \text{及び} \quad \text{ある正整数 } c \text{ に対して}$$

$$V_d(c) = \{(a_0 x^{b_0+c} + a_1 x^{b_1+c} + \dots + a_d x^{b_d+c})\} \quad \text{なる } d\text{-flat を考える。}$$

$V_d(c) = V_d(0)$  なる正整数  $c$  を initial flat  $V_d(0)$  の cycle といふ [2]。

$V_d(v) = V_d(0)$  であるから,  $v$  は常に任意の  $d$ -flat  $V_d(0)$  の cycles の一つである。  $V_d(0)$  の cycles の中で最小値を minimum cycle と呼び, m.c. と略記する。

$V_d(0)$  の m.c. を  $\theta$  とすれば,  $V_d(1), V_d(2), \dots, V_d(\theta-1)$  も m.c.  $\theta$  をもつから これら  $\theta$  個の flats を m.c.  $\theta$  の initial  $d$ -flat  $V_d(0)$  から generate される  $d$ -flats といふ。

これらの定義と minimum cycles の性質 [2] から次の定理を得る。

[定理1]  $\theta_i = (m^{t+1}-1)/(m^{i+1}-1)$  が正整数ならば,  $V_i(0) = \{(a_0x^0 + a_1x^{e_1} + \dots + a_ix^{i\theta_i})\}$  は m.c.  $\theta_i$  の  $i$ -flat である.

[定理2] 一つの  $d$ -flat  $V_d$  が必ずより小さい m.c.  $\theta$  をもつならば,  $\theta$  は  $\theta = (m^{t+1}-1)/(m^{j+1}-1)$  の形である. ここに  $j+1$  は  $t+1$  と  $d+1$  との公約数である. この場合  $V_d$  は m.c.  $\theta$  の  $j$ -flat  $V_j(0) = \{(a_0x^0 + a_1x^{e_1} + \dots + a_jx^{j\theta})\}$  から generate される  $\theta$  個の  $j$ -flats の中の  $(m^{d+1}-1)/(m^{j+1}-1)$  個から成る.

[定義]  $i+1$  を  $t+1$  と  $d+1$  との公約数の一つとすると, m.c.  $\theta_i = (m^{t+1}-1)/(m^{i+1}-1)$  の  $i$ -flat  $V_i(0) = \{(a_0x^0 + a_1x^{e_1} + \dots + a_ix^{i\theta_i})\}$  から generate される  $\theta_i$  個の flats の中から  $d_i+1 = (d+1)/(i+1)$  個の flats を選り出し, 各 flats 上の一次独立を  $i+1$  個ずつ合計  $d+1 = (i+1)(d_i+1)$  個の点が一次独立となるようできる. これから  $d+1$  個の点によって張られる flat を  $d_i+1$  個の一次独立な m.c.  $\theta_i$  の  $i$ -flats から作られる  $d$ -flat と呼び, " $d(i)$ -flat" と書く. 特に,  $i=0$  の場合, 即ち,  $d$ -flat  $V_d$  が  $d+1$  個の  $0$ -flats からできているとき, その flat も形式的に " $d(0)$ -flat" と書くことにする.

すると定義から, 定理2で述べた flat は一つの  $d(j)$ -flat であることがわかる.

[定理3] (1) m.c.  $\theta$  をもつ  $d$ -flat は常に存在する.

(2)  $j+1$  が  $t+1$  と  $d+1$  との公約数であるような正整数  $j$  が存在するならば,  $\theta_j = (m^{t+1}-1)/(m^{j+1}-1)$  を m.c. とする  $d$ -flat が存在する.

[定理4]  $j+1$  が  $t+1$  と  $d+1$  との公約数であり, かつ,  $V_d$  が  $\theta_j = (m^{t+1}-1)/(m^{j+1}-1)$

$(m^{j+1}-1) \in m.c.$  にもつ  $d$ -flat をらば,  $V_d$  は一つの  $d(j)$ -flat であるばかりでなく,  $i+1$  が  $j+1$  の約数であるような正整数  $i$  または  $i=0$  に対して  $d(i)$ -flat とみなすことができる.

この定理から  $d(i)$ -flats の全体は  $m.c. \theta_i$  の  $d$ -flats のみならず,  $\theta_i$  の約数であるような  $\theta_j$  に対して  $m.c. \theta_j$  の  $d(j)$ -flats をも含むことがわかる. よって  $m.c. \theta_i$  の  $d(i)$ -flats の個数  $n_i^*$  は  $d(i)$ -flats の個数  $n_i$  から, かかる  $d(j)$ -flats の個数  $n_j^*$  をすべて引くことによって求まる.

さて,  $n_i$  は次の定理によって計算される.

[定理5]  $d(i)$ -flats の個数は  $n_i = \phi(t_i, d_i, m^{i+1})$  である.

ここに  $t_i = \frac{t+1}{i+1} - 1$ ,  $d_i = \frac{d+1}{i+1} - 1$  であり,  $\phi(t, d, m)$  は  $PG(t, m)$  における  $d$ -flats の個数を表わす関数で次式で与えられる [1]:

$$\phi(t, d, m) = \frac{(m^{t+1}-1)(m^t-1) \cdots (m^{t-d+1}-1)}{(m^{d+1}-1)(m^d-1) \cdots (m-1)}.$$

以上をまとめて, Proposition 1 (Rao) に対応する次の general theorem を得る.

[定理6] (1)  $t+1$  と  $d+1$  とが互に素ならば,  $PG(t, m)$  におけるすべての  $d$ -flats は  $m.c. v$  をもち,  $\eta = \phi(t, d, m)/v$  個の initial  $d$ -flats から generate される.

(2)  $(t+1, d+1) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_e^{\alpha_e}$  ( $>1$ ,  $p_i$  は  $p_i < p_{i+1}$  をみたす素数) とき  $t+1$  と  $d+1$  との最大公約数とすると, 異なる  $m.c.$  の個数は  $\prod_{i=1}^e (1 + \alpha_i)$  である. 今 .

$$\theta[x_1, \dots, x_e] = (m^{t+1} - 1) / (m^{p_1^{x_1} \dots p_e^{x_e}} - 1), \quad t[x_1, \dots, x_e] = (t+1) / (p_1^{x_1} \dots p_e^{x_e}) - 1,$$

$$d[x_1, \dots, x_e] = (d+1) / (p_1^{x_1} \dots p_e^{x_e} - 1), \quad m[x_1, \dots, x_e] = m^{p_1^{x_1} \dots p_e^{x_e}}$$

とおくと,  $\theta[x_1, \dots, x_e] \in \text{cycle}$  及び m.c. とする  $d(p_1^{x_1} \dots p_e^{x_e} - 1)$ -flats  
の個数はそれぞれ

$$n(x_1, \dots, x_e) = \phi(t[x_1, \dots, x_e], d[x_1, \dots, x_e], m[x_1, \dots, x_e]),$$

$$n^*(x_1, \dots, x_e) = n(x_1, \dots, x_e),$$

$$n^*(x_1, \dots, x_e) = n(x_1, \dots, x_e) - \sum_{x_j \leq y_j \leq x_j; \exists j, x_j < y_j} n^*(y_1, \dots, y_e)$$

で与えられる. よって m.c.  $\theta[x_1, \dots, x_e]$  の initial  $d$ -flats の個

数は  $n(x_1, \dots, x_e) = n^*(x_1, \dots, x_e) / \theta[x_1, \dots, x_e]$  であり, これから

m.c.  $\theta[x_1, \dots, x_e]$  の  $d$ -flats の全体が generate される.

### 3. $EG(t, m)$ における $d$ -flats

[定義]  $GF(m)$  上の  $t$  次元ユークリッド空間  $EG(t, m)$  とは次の条件を  
みたす点の集合である.

(a)  $GF(m^t)$  の各元を点と考へて  $(v)$  で表わす. 二点  $(v)$  と  $(u)$  とは  
 $v = u$  のときに限り同一点である.

(b)  $(v_0), (v_1), \dots, (v_d) \in GF(m)$  に関して一次独立な点とすると  
き, 点  $(a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_d v_d)$  の全体を  $d$ -flat という. ただし,  
 $a_i \in GF(m)$  は  $\sum_{i=0}^d a_i = 1$  という制約条件をみたすものとする.

定義より,  $EG(t, m)$  は  $PG(t, m)$  から一つの超平面  $(t-1)$ -flat 上  
のすべての点を取り除いて得られる空間とみなすことができる. このこ  
とから  $EG(t, m)$  における  $d$ -flats の個数は  $b = \phi(t, d, m) - \phi(t-1, d, m)$



であることがわかる。

次に,  $\alpha \in \text{GF}(m^t)$  の原始元のひとつとすると, 次のような  $\text{EG}(t, m)$  の  $\alpha$  によるべき表現を得る:

$$\text{EG}(t, m) = \{(0), (\alpha^0), (\alpha^1), \dots, (\alpha^{m^t-2})\}.$$

$\text{EG}(t, m)$  における  $d$ -flats の minimum cycles による類別に戻しては次の二つの場合が考えられる。

(1) 原点(0)を通らない  $d$ -flats

この場合の  $d$ -flats はすべて, m.c.  $v^* = m^t - 1$  をもち, その位数は  $b_1 = b - \phi(t-1, d-1, m) = \phi(t, d, m) - \phi(t-1, d, m) - \phi(t-1, d-1, m)$ 。

(2) 原点(0)を通る  $d$ -flats

原点を通る任意の  $d$ -flat は  $\forall d(0) = \{(a_1 x^{b_1} + a_2 x^{b_2} + \dots + a_d x^{b_d})\}$  という形で表わされ,  $\sum_{i=1}^d a_i = 1$  という制約条件は不用となる。さて,  $\theta = (m^t - 1)/(m - 1)$  とおくと原点を通るすべての  $d$ -flats は cycles の一つとして  $\theta$  をもつから,  $\text{EG}(t, m)$  における原点を通る  $d$ -flats の全体は cycles に戻しては  $\text{PG}(t-1, m)$  における  $(d-1)$ -flats の全体と同じ構造をもつことがわかる。よって定理6の直接的結果として, Proposition 2(Rao)に対応する次の定理を得る。

[定理7]  $(t, d) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_e^{\alpha_e}$  ( $> 1$ ,  $p_i$  は  $p_i < p_{i+1}$  をみたす素数) を  $t$  と  $d$  との最大公約数とすると, 原点を通る  $d$ -flats の m.c. の位数は  $\prod_{i=1}^e (1 + \alpha_i)$  である。今

$$\theta(x_1, \dots, x_e) = (m^t - 1) / (m^{p_1^{x_1} \dots p_e^{x_e}} - 1), \quad t(x_1, \dots, x_e) = t / (p_1^{x_1} \dots p_e^{x_e}),$$

$$d(x_1, \dots, x_e) = d / (p_1^{x_1} \dots p_e^{x_e}), \quad m(x_1, \dots, x_e) = m^{p_1^{x_1} \dots p_e^{x_e}}$$

とあくと, 原点を通り  $\theta[x_1, \dots, x_e] \in \text{cycle}$  及  $\alpha$  m.c. とする  $d(p_1^{x_1} \dots p_e^{x_e}) - \text{flats}$  の個数はそれぞれ

$$n(x_1, \dots, x_e) = \phi(t[x_1, \dots, x_e] - 1, d[x_1, \dots, x_e] - 1, m[x_1, \dots, x_e]),$$

$$n^*(x_1, \dots, x_e) = n(x_1, \dots, x_e),$$

$$n^*(x_1, \dots, x_e) = n(x_1, \dots, x_e) - \sum_{x_j \neq y_j \leq x_j; \exists j, x_j < y_j} n^*(y_1, \dots, y_e)$$

で与えられる. よって m.c.  $\theta[x_1, \dots, x_e]$  の initial  $d$ -flats の個数は

$$n(x_1, \dots, x_e) = n^*(x_1, \dots, x_e) / \theta[x_1, \dots, x_e] \text{ であり, これらから m.c. } \theta[x_1, \dots, x_e]$$

の  $d$ -flats の全体が generate される.

#### 4. 巡回的に生成される不完備計画の Construction

designs の構成に関しては次の定理が必要である.

[定理8] 定理6の(2)の条件の下で, 2点  $(x^\alpha)$  と  $(x^\beta)$  とを通る cycle  $\theta[x_1, \dots, x_e]$

の  $d(p_1^{x_1} \dots p_e^{x_e} - 1)$ -flats の個数  $\lambda_i(x_1, \dots, x_e)$  は

$\alpha - \beta \equiv 0 \pmod{\theta[x_1, \dots, x_e]}$  のとき

$$\lambda_1(x_1, \dots, x_e) = \phi(t[x_1, \dots, x_e] - 1, d[x_1, \dots, x_e] - 1, m[x_1, \dots, x_e]),$$

$\alpha - \beta \not\equiv 0 \pmod{\theta[x_1, \dots, x_e]}$  のとき

$$\lambda_2(x_1, \dots, x_e) = \phi(t[x_1, \dots, x_e] - 2, d[x_1, \dots, x_e] - 2, m[x_1, \dots, x_e]).$$

[定義]  $\theta[x_1, \dots, x_e] < v$  のとき,  $PG(t, m)$  の任意の2点  $(x^\alpha)$  と  $(x^\beta)$  との間に関係を定義する.

$\alpha - \beta \equiv 0 \pmod{\theta[x_1, \dots, x_e]}$  のとき  $(x^\alpha)$  と  $(x^\beta)$  とは 1st associate,

$\alpha - \beta \not\equiv 0 \pmod{\theta[x_1, \dots, x_e]}$  のとき  $(x^\alpha)$  と  $(x^\beta)$  とは 2nd associate,

任意の点はそれ自身と 0-th associate である。

これらの点の間に定義されたこれらの関係は association scheme の満たすべき条件を満足する。これより次の定理を得る。

[定理 9]  $PG(t, m)$  において一つの  $d$ -flat が  $v$  より小さい cycle  $\theta[x_1, \dots, x_e]$  をもつならば,  $PG(t, m)$  における点の全体を treatments,  $d(p_1^{x_1} \dots p_e^{x_e} - 1)$ -flats の全体を blocks にとることにより  $N_2$  type (GD type) の PBIBD が得られる。その parameters は次の通りである。

$$\begin{aligned} v &= \phi(t, 0, m), & b &= \phi(t[x_1, \dots, x_e], d[x_1, \dots, x_e], m[x_1, \dots, x_e]), \\ k &= \phi(d, 0, m), & r &= \lambda_1(x_1, \dots, x_e), \lambda_1 = \lambda_1(x_1, \dots, x_e), \lambda_2 = \lambda_2(x_1, \dots, x_e), \\ n_0 &= 1, & n_1 &= r(x_1, \dots, x_e) - 1, \quad n_2 = r(x_1, \dots, x_e) \{ \theta[x_1, \dots, x_e] - 1 \}, \end{aligned}$$

$$\text{ただし } r(x_1, \dots, x_e) = v / \theta[x_1, \dots, x_e]$$

$$\begin{bmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(x_1, \dots, x_e) - 2 & 0 \\ 0 & r(x_1, \dots, x_e) \{ \theta[x_1, \dots, x_e] - 1 \} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r(x_1, \dots, x_e) - 1 \\ r(x_1, \dots, x_e) - 1 & r(x_1, \dots, x_e) \{ \theta[x_1, \dots, x_e] - 2 \} \end{bmatrix}.$$

[定理 10] 定理 9 で得られた design において, 原始元  $s$  のべきの指数が  $\theta[x_1, \dots, x_e]$  より小さい点のみを treatments にとれば, 次の parameters をもつ BIBD が得られる。

$$v^* = \theta[x_1, \dots, x_e] = \phi(t[x_1, \dots, x_e], 0, m[x_1, \dots, x_e]),$$

$$b^* = \phi(t[x_1, \dots, x_e], d[x_1, \dots, x_e], m[x_1, \dots, x_e]),$$

$$k^* = \phi(d[x_1, \dots, x_e], 0, m[x_1, \dots, x_e]),$$

$$r^* = \phi(t[x_1, \dots, x_e] - 1, d[x_1, \dots, x_e] - 1, m[x_1, \dots, x_e]),$$

$$\lambda^* = \phi(t[x_1, \dots, x_e] - 2, d[x_1, \dots, x_e] - 2, m[x_1, \dots, x_e]).$$

次の定理は定理10の系として得られる結果で、実際に幾何学的 BI  
BDを作る際有力な方法を示すものである。

[定理11]  $\tilde{t} = n(t+1)-1$ ,  $\tilde{d} = n(d+1)-1$  とおくとき Design  $PG(t, m=p^n):d$   
は Design  $PG(\tilde{t}, p): \tilde{d}$  において,  $GF(p^{\tilde{t}+1})$  の原始元  $\alpha$  のべきの指数  
が  $\theta = \phi(t, 0, m)$  より小さい点のみを treatments に, cycle  $\theta$  の  $\tilde{d}$ -flats の  
みを blocks にとることによって得られる。

幾何学的不完備計画を巡回的に生成する difference sets を実際に作る  
には, m.c.  $\theta[x_1, \dots, x_e]$  の  $\eta(x_1, \dots, x_e)$  個の initial  $d$ -flats 上の点  
 $\{(x^{d_{ij}} \mid i=1, 2, \dots, \eta(x_1, \dots, x_e); j=1, 2, \dots, k)\}$  と各  $\theta[x_1, \dots, x_e]$  毎に,  $\alpha$  の  
べきの指数  $\{d_{ij} \mid i=1, 2, \dots, \eta(x_1, \dots, x_e); j=1, 2, \dots, k\}$  で置きかえれば  
よい。  $EG(t, m)$  においては  $v = v^* + 1 = m^t$  個の点があるから, 原点(0)  
に対して若干の修正が必要である。即ち, 原点(0)には記号  $\infty$  を対応さ  
せ  $\infty + a = \infty$  ( $a=0, 1, 2, \dots, v-2$ ) なる性質を持たせることにする。  
すると, すべての  $\theta[x_1, \dots, x_e]$  に対して得られた m.c.  $\theta[x_1, \dots, x_e]$  の diffe-  
rence sets  $\{d_{ij}\}$  の全体は BIBD  $PG(t, m):d$  及び BIBD  
 $EG(t, m):d$  を生成する[2]。

cycle  $\theta[x_1, \dots, x_e]$  の difference sets のみを考えると定理9で述べた  
PBIBDが得られるし, 更に, この difference sets で cycle  $\theta[x_1, \dots, x_e]$   
より小さい整数のみから成る部分集合の族を考えると 定理10で述べた  
BIBD が得られる。

## 参考文献

- [1] Bose, R.C. (1939). On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. Eugenics 9 353-399.
- [2] Rao, C.R. (1945). Finite geometries and certain derived results in theory of numbers. Proc. Nat. Inst. Sci. India 11 136-149.
- [3] Rao, C.R. (1946). Difference sets and combinatorial arrangements derivable from finite geometries. Proc. Nat. Inst. Sci. India 12 123-135.
- [4] Yamamoto, S., Fukuda, T. and Hamada, N. (1966). On finite geometries and cyclically generated incomplete block designs. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1 30 137-149.